Devoir libre n°5
à rendre le 11/04/05

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{E}$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4, nous considérons l'application f qui à tout polynôme P de $\mathbf{E}$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = (-1 + X)P'(X) - P(X)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P .

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.
2. Soit la base $B_0 = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbf{E}$.
 - (a) Déterminer la matrice M de f dans la base B_0 .

(b) Résoudre les systèmes $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ pour $\lambda = -1, 0, 1, 2$ et 3

- (c) Déterminer $Im f$ et $\ker f$. En préciser des bases et vérifier le théorème du rang.
3. Nous considérons l'application $f^2 = f \circ f$
 - (a) Exprimer $f^2(P)$ en fonction de P, P' et P'' .
 - (b) Déterminer le noyau de f . En déduire le rang de f^2 .
4. Utiliser ce qui précède pour déterminer les solutions polynômiale de l'équation différentielle

$$(-1 + x)^2 y'' + (1 - x)y' + y = 0$$

Exercice 2

Nous considérons la forme différentielle

$$\omega(x, y) = -y^2 dx - x^2 dy$$

définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

1. Dire pourquoi ω n'est pas exacte.
2. Nous considérons le facteur intégrant $f[u(x, y)]$ où $u(x, y) = xy$.
 - (a) Montrer que si $f(u)$ vérifie l'équation différentielle

$$uf'(u) + 2f(u) = 0 \quad (1)$$

alors $\omega'(x, y) = \omega(x, y) \times f[u(x, y)]$ est exacte.

- (b) Résoudre (1), en déduire les fonctions $\varphi(x, y)$ définies sur U telles que $\omega' = d\varphi$.
 - (c) Déterminer la courbe intégrale $\varphi(x, y)$ de $\omega = 0$ telle que $\varphi(1, 1) = 0$
3. (a) Montrer que $\omega(x, y) = 0$ est équivalent à une équation différentielle, notée (2), du premier ordre.
 - (b) Intégrer (2) et retrouver le résultat précédent.

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$. Déterminer $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On utilisera le changement de variable $u = x + \alpha y$ et $v = x - \alpha y$.

• • • • •